

# МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АКТИВНОСТИ В СЕТЕВЫХ СТРУКТУРАХ

**О.П. Кузнецов**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*  
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65  
E-mail: [olkuznes@ipu.ru](mailto:olkuznes@ipu.ru)

**Ключевые слова:** активность, слабые связи, пороговые модели поведения, перколяция, кластеры, критическое состояние, клеточный автомат, игра выстреливания фишек

**Аннотация:** В работе дан краткий обзор различных сетевых моделей распространения активности. Рассмотрены модели распространения информации в социальных сетях, процессы перколяции и возникновения кластеров в телекоммуникационных сетях, концепция самоорганизованной критичности и два варианта ее формализации: клеточные автоматы и игра выстреливания фишек. Отмечаются общие черты этих моделей.

## 1. Введение

Настоящая работа представляет собой краткий обзор некоторых сравнительно новых направлений в области сетевых моделей, связанных с процессами распространения активности. Этот обзор ни в коей мере не претендует на полноту. Его цель – показать общность сетевых моделей, созданных для разных предметных областей, описанных в разных системах понятий и с помощью различных математических средств. Он опирается не только на последние, но и на первые работы в этих областях; фундаментальность этих базовых работ подтверждается их крайне высокой цитируемостью.

Важным аспектом рассматриваемых направлений является их стремление перейти от микроуровня, на котором сети описываются классической теорией графов, к макроуровневым описаниям, которые рассматривают не отдельные вершины и пути, а крупные фрагменты сети, их типологию и их вероятностные распределения. Такой подход представляется единственно возможным при анализе больших сетей, содержащих миллионы элементов, – таких как социальные сети, Интернет и мобильные сети, а также структуры нервной системы мозга.

## 2. Сетевые модели социальных процессов

### 2.1. Сила слабых связей

Когда заходит речь о социальных сетях, как правило, имеются в виду онлайн-социальные сети, т.е. сети, живущие в Интернете. Однако понятие социальной сети известно социологам еще с середины XX века. Социальная сеть – это система связей между людьми, возникающая в результате различного рода контактов – постоянных и эпизодических, ежедневных и сравнительно редких. Долгое время попытки формализо-

вать структурные задачи социологии делались только на микроуровне, при исследовании малых социальных групп. Ярким примером являются «треугольники Хайдера» [1] – первый пример моделей, которые впоследствии получили название когнитивных карт.

В 1973 году появилась работа Марка Грановеттера «Сила слабых связей» [2], в которой впервые была предложена формальная модель связей между микро- и макроуровнями в социологии. Эта модель показала, каким образом организованы связи, по которым в обществе распространяется разного рода социальная информация (слухи, мнения, мода, недовольство властью и т.д.) между различными малыми группами, находящимися на большом территориальном и социальном расстоянии.

Модель Грановеттера строится на следующих предположениях.

1) В социальных сетях существуют сильные и слабые связи. Сильные связи образуются между людьми, которые постоянно взаимодействуют. Это – люди одной «малой группы» близкие родственники, трудовой коллектив; люди, проживающие в одном месте (товарищества жильцов, дачные кооперативы), связанные общностью интересов (клубы нумизматов, футбольные фанаты). Слабые связи – эпизодические, они образуются между людьми разных малых групп: дальние родственники; одноклассники и однокурсники; ученые из разных городов, встречающиеся на конференциях. На рис. 1 сильные связи изображены сплошными линиями, слабые – пунктирными.

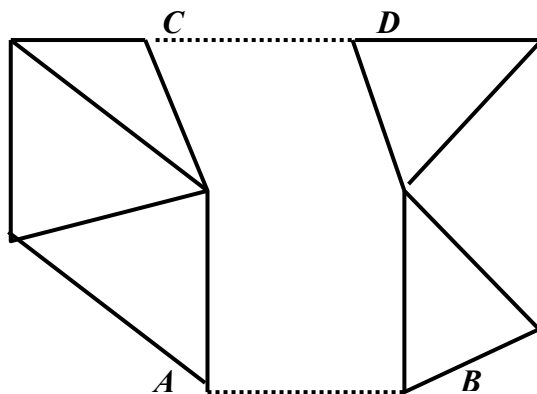


Рис. 1.

2) В социальной сети существуют локальные мосты. В теории графов мост в неориентированном графе – это ребро, удаление которого делает связный граф несвязным. Наличие моста  $e^*$  означает, что в графе существуют такие два подмножества вершин  $V_1$  и  $V_2$ , что любой путь из  $V_1$  в  $V_2$  проходит через  $e^*$ . Локальный мост Грановеттера – более «мягкое» понятие. Его удаление сильно изменяет длину некоторых путей. Например, в графе на рис. 1 после удаления локального моста  $AB$  кратчайший путь из  $A$  в  $B$  должен проходить через ребро  $CD$ , т.е. становится существенно более длинным.

3) «Исключенная триада» (рис. 2б). Предполагается, что, если есть сильные связи  $AB$  и  $AC$ , то обязательно есть хотя бы слабая связь  $BC$  (рис. 2а). Ситуация на рис. 2б исключается или, по крайней мере, маловероятна.

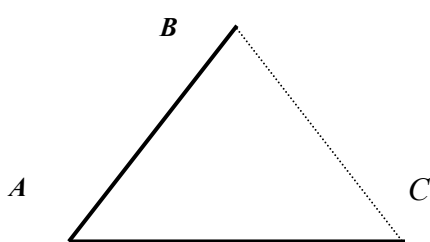


Рис. 2 а

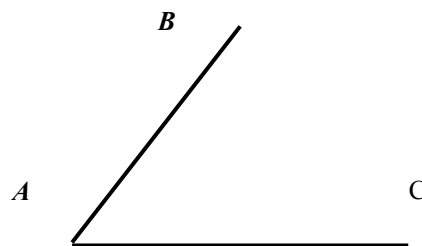


Рис. 2 б

4) Сильная связь смежна хотя бы с одной сильной связью. Это фактически означает, что любая малая группа состоит более чем из двух членов, или в более мягкой формулировке: двучленных групп в реальности так мало, что в модели ими можно пренебречь.

Из предположений 1-4 вытекает утверждение, которое при жесткой интерпретации этих предположений можно считать теоремой: *Локальными мостами могут быть только слабые связи.*

Действительно, пусть, например, локальный мост  $AB$  на рис. 1 – сильная связь. Тогда в силу условия 3 должна существовать связь  $EB$ , и следовательно,  $AB$  не является мостом, поскольку после удаления  $AB$  остается путь из  $A$  в  $B$  через  $E$ , который длиннее пути  $AB$  всего лишь на 1.

Отсюда видно, что в среднем вероятность успешной передачи ресурса, информации или какой-то активности сильнее пострадает от удаления слабой связи, чем от удаления сильной. Хождение новости по сильным связям с большей вероятностью ограничится несколькими кластерами, чем при движении по слабым связям, поскольку новость не будет проходить через мосты. Поэтому наличие индивидов с большим количеством слабых связей наиболее способствует распространению информации, активности, инноваций, поскольку некоторые из этих связей являются локальными мостами. Если инновация будет распространяться индивидами, у которых мало слабых связей, она, вероятнее всего, ограничится несколькими кластерами.

«Теорема о локальных мостах» подтверждается исследованиями «тесного мира» [3]. Случайно отобранным индивидам раздаются буклеты с просьбой отправить их названному лицу через человека, которого отправитель знает лично и кто более вероятно знаком с целевым лицом. Новый получатель передает буклет дальше; в итоге либо буклет достигает цели, либо нет. Разрешается выбирать из двух категорий: «друзья» или «знакомые» (сильные и слабые связи). В одном из исследований белых отправителей попросили передать буклет, где в качестве цели выступал темнокожий. Важной была первая передача буклета от белого к темнокожему. В 50% случаев, когда белый считал темнокожего знакомым, цепочка завершалась; но когда белый отправлял буклет темнокожему другу, показатель завершения падал до 26 %.

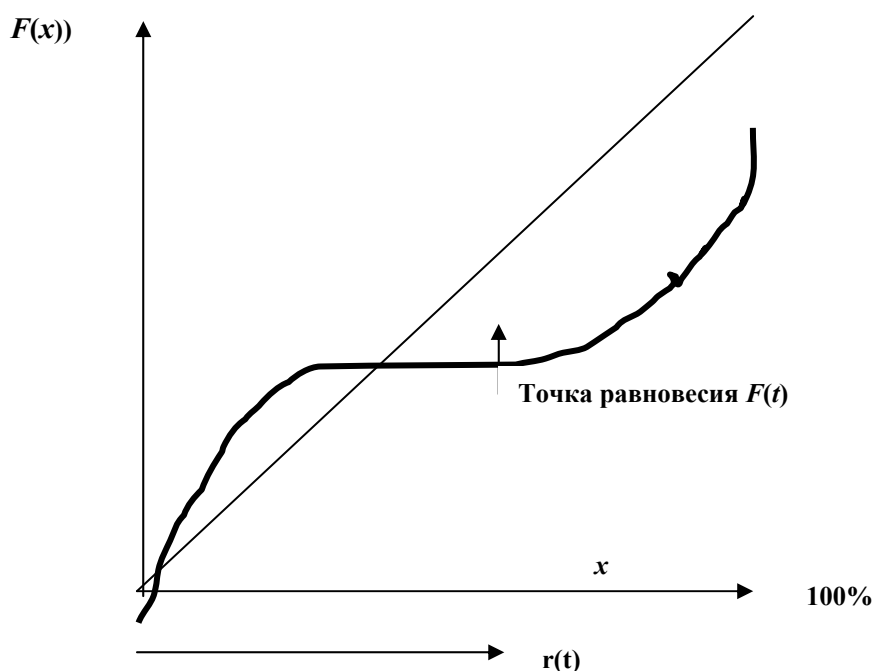
Чем больше локальных мостов существует в сообществе, тем более сплоченным оказывается данное сообщество и тем выше его способность действовать сообща. Слабые связи с большей вероятностью соединяют членов различных малых групп, чем сильные; последние, как правило, сосредоточены внутри отдельных групп. Сильные связи, способствующие формированию сплоченности на локальном уровне, на макроуровне приводят к фрагментации. Математически это очевидно: из тезиса о слабых связях следует, что удаление слабых связей делает граф социальной сети несвязным. Неявно из модели слабых связей следует, что граф связей общества по Грановеттеру состоит из «кластеров» (подграфов, с довольно плотными сильными связями, т.е. близких к кликам), которые соединены разреженными слабыми связями.

## 2.2. Пороговые модели коллективного поведения

Вторая классическая модель Грановеттера [4] посвящена пороговым моделям коллективного поведения. В ней рассматриваются модели коллективного поведения для ситуаций, где участники имеют две альтернативы – действовать (да) или не действовать (нет). Выбор *да* происходит при достижении личного порога: числа или доли тех, кто уже выбрал *да*. Порог – это точка, начиная с которой, по мнению субъекта, выигрыш превышает цену.

Радикалы имеют более низкий порог. Радикалы с нулевым порогом – инициаторы («подстрекатели»). Консерваторы имеют высокий порог. Те, кто не будет действовать ни при каких обстоятельствах, имеют порог 100%.

Эти модели можно применять к таким процессам, как голосование, распространение инноваций, забастовки, беспорядки, миграция, распространение слухов и т.д.



**Рис.3.**  $x$  – пороги,  $f(x)$  – частотное распределение,  $F(x)$  – кумулятивная функция распределения: доля группы, имеющая порог  $\leq x$ ;  $r(t)$  – доля группы, включившаяся в процесс в дискретный момент  $t$ .

Модельным примером может служить простая модель беспорядков. Пусть на площади собралась толпа недовольных людей в 100 человек;  $i$ -й человек имеет порог  $i-1$  (1-й имеет порог 0). Это – равномерное распределение порогов, которое дает эффект «домино». Если в этой толпе одного человека с порогом 1 заменить на человека с порогом 2, то процесс остановится в самом начале. Это пример того, как коллективы, очень близкие по намерениям, могут демонстрировать совершенно разное поведение. В общем случае поведение группы изображено на рис. 3.

Пусть популяция в городе имеет равномерное распределение порогов: 1% имеет порог 0%, 1% имеет порог 1%, ..., 1% имеет порог 99%. Собирающаяся толпа из 100 человек – это случайная выборка из большой популяции. В этом случае положение точки равновесия может меняться: в толпе может не быть зачинщика, человека с порогом 1 и т.д., т.е. распределение в толпе может сильно отличаться от распределения во

всей популяции. Поэтому в одном городе беспорядки произойдут, а в другом с тем же общим распределением порогов – нет. Процесс зависит от размера популяции. В небольшом городе такая выборка (малый инцидент) может произойти лишь однажды, и вероятность того, что из нее произойдут большие беспорядки, невелика. В большом городе малых инцидентов будет больше, и вероятность большого инцидента возрастает.

Эти события можно представить развернутыми не во времени, а в пространстве: как одновременные инциденты среди локальных групп. Здесь будут важны *слабые связи* между группами. Таким образом, две модели Грановеттера можно объединить в одну.

### 3. Перколяция и безмасштабные сети

#### 3.1. Перколяция

Теория перколяции (percolation – просачивание) возникла в физике, как теория, исследующая задачи просачивания жидкостей в пористой среде, а также некоторые задачи, связанные с проводимостью [5, 6]. Формально такого рода задачи можно рассматривать на неориентированном графе, вершинам (узлам) которого соответствуют пустоты пористой среды, а ребрам – каналы, соединяющие пустоты. Процесс просачивания выглядит при этом как постепенное и случайное заполнение пустот и/или каналов жидкостью, при котором в графе возникают пути; элементы (вершины или ребра), заполненные жидкостью, принято называть занятыми.

Связный подграф называется кластером. Кластер, в котором есть путь от верхней до нижней (или от левой до правой) границы графа, называется *перколяционным кластером*. В бесконечном графе перколяционный кластер бесконечен и единственен.

Порог  $p_c$  перколяции – доля занятых узлов, при которой возникает перколяционный кластер.

Две главных задачи теории перколяции формулируются в двух вариантах: в первом варианте под элементами понимаются узлы (задача узлов), во втором – ребра (задача связей).

Прямая задача: Какова доля  $p$  занятых элементов графа, при которой возникает путь от одного края до другого?

Обратная задача: какую долю узлов (или связей) надо удалить (блокировать), чтобы перколяционный кластер распался на несвязные части?

Аналогичные задачи появились в совершенно другой области – теории случайных графов, которая берет свое начало от работ Эрдеша-Реньи [7]. Случайный граф – это граф, в котором каждая пара вершин соединена неориентированным ребром с вероятностью  $p$ . Типичные задачи, изучаемые в этой теории, – распределения числа подграфов со стандартной структурой (путей, циклов, деревьев) с различным числом вершин при заданной вероятности  $p$ . В терминах теории случайных графов задачи перколяции легко формулируются.

Основные параметры, вычисляемые в этих задачах:  $p_c$  – порог;  $N$  – число узлов;  $N_s$  – среднее число кластеров размера  $s$ ;  $S$  – средний размер кластера;  $l$  – корреляционная длина: среднее расстояние между двумя узлами одного кластера;  $g(r)$  – корреляционная функция: среднее число узлов в кластере, находящихся на расстоянии  $r$  от произвольно выбранного узла.

Основные точные результаты получены для графов с регулярной структурой; характерным примером таких графов являются квадратные решетки. На рис. 4а изображена решетка, в которой перколяционный путь идет по узлам; на рис.4б тот же путь идет по связям.

Для бесконечной квадратной решетки величина  $p_c$  определена:  $p_c=0,5$  для задачи связей;  $p_c \approx 0,59275$  для задачи узлов.

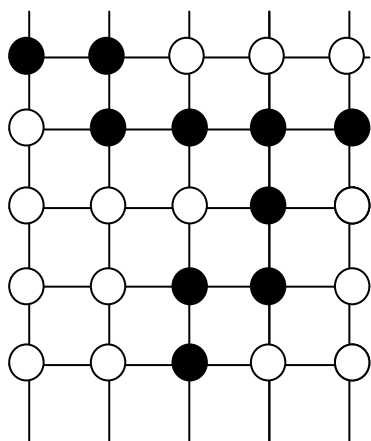


Рис. 4 а

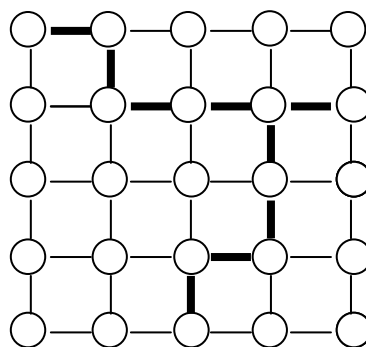


Рис. 4 б

Другой пример графа с регулярной структурой – дерево Кэли. Дерево Кэли – это дерево, у которых степени всех вершин равны  $z$ . На рис.5 показано дерево Кэли, где  $z = 3$ .

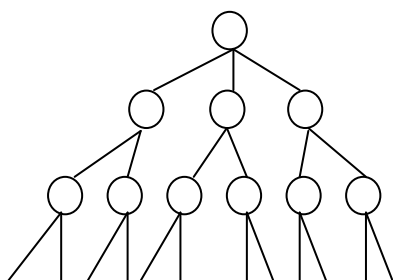


Рис. 5.

Покажем, как вычисляется порог  $p_c$  в дереве Кэли. Выберем произвольный узел и перейдем из него в один из смежных  $z$  узлов. Из него выходит  $z-1$  ребер к другим  $z-1$  узлам, каждый из которых занят с вероятностью  $p$ . Значит, существует в среднем  $(z-1)p$  новых занятых узлов, к которым существует путь из исходного узла. Если это число меньше 1, то вероятность найти связный путь заданной длины убывает экспоненциально по мере увеличения этой длины.

Если же  $(z-1)p > 1$ , то существует положительная вероятность того, что в графе существуют пути сколь угодно большой длины (бесконечные кластеры). Таким образом, порог перколяции  $p_c$  определяется из уравнения  $(z-1)p_c = 1$ , откуда  $p_c = \frac{1}{z-1}$ .

При достижении порога перколяции по узлам занятые узлы бесконечной решетки образуют кластеры всех размеров из связанных между собой узлов. Распределение кластеров по размерам следует степенному закону: число  $n(s)$  кластеров, содержащих  $s$  занятых узлов, пропорционально  $s^{-\tau}$ . Для квадратной решетки  $\tau = 187/91 = 2,054945$ . В логарифмической шкале график любого степенного закона – прямая линия, поскольку  $\log n(s) = -\tau \log s$ . Степенной закон  $n(s) = c s^{-\tau}$  означает, что отношение числа кластеров одного размера к числу кластеров другого размера зависит не от их размеров  $s$ , а лишь от отношения размеров. Таким образом, перколяционные кластеры *самоподобны*, или независимы от масштаба, на интервале от шага решетки до размера всей решетки.

### 3.2. Безмасштабные сети

Исследования больших сетей привели к задачам, сходным с задачами перколяции. Это неудивительно, поскольку содержательные проблемы больших сетей сходны с проблемами упомянутых выше теорий. Сходство с перколяцией заключается в похожих процессах распространения активности; сходство со случайными графами объясняется тем, что большие сети типа Интернета или мобильных сетей не являются закрытым объектом, заранее спроектированным в одном месте. Они открыты, постоянно эволюционируют, их элементы постоянно и случайно возникают и исчезают в физически разных, сильно удаленных друг от друга местах.

В работе Барабаши-Альберта [8], которая быстро стала классической, было введено понятие *безмасштабной* (масштабно-инвариантной) *сети* (*scale-free network*) – графа с очень большим числом вершин, в котором степени вершин распределены по степенному закону, то есть доля вершин со степенью  $k$  примерно или асимптотически пропорциональна  $k^{-\gamma}$ .

Многие естественно возникающие сети – социальные, коммуникационные, графы цитирований, ссылок в Интернете и другие – хорошо моделируются безмасштабными графами. Главная отличительная черта безмасштабных сетей – это существование узлов-концентраторов, степени которых очень велики по сравнению со степенями большинства узлов.

Безмасштабные сети малочувствительны к повреждениям. Большие концентраторы («хабы»), как правило, окружены меньшими концентраторами, а те в свою очередь еще меньшими и т.д. Если один из концентраторов будет потерян, то почти все связи в сети сохранятся за счет существования концентраторов меньшего размера.

С точки зрения теории перколяции безмасштабные сети – это перколяционные кластеры. Их устойчивость к повреждениям говорит о том, что порог перколяции в них существенно превышен.

С точки зрения модели Грановеттера – это сети с большим количеством локальных мостов.

## 4. Самоорганизованная критичность и «абелева куча песка» (Abelian sandpile)

История возникновения концепции самоорганизованной критичности рассказана в книге П. Бака [9] – одного из ее авторов. Эта концепция возникла в группе физиков, которые первоначально изучали систему жестко соединенных маятников, а затем обнаружили, что найденные ими закономерности проявляются в самых разных областях. Суть этой концепции Бак формулирует так.

«В природе сложное поведение отражает тенденцию систем, состоящих из большого числа элементов, эволюционировать в далекое от статического равновесия, но динамически уравновешенное критическое состояние, где даже незначительные возмущения могут привести к событиям, или лавинам, любых масштабов. Большинство изменений происходит не путем плавных постепенных переходов, а через катастрофы. Эволюция к этому чувствительному состоянию происходит без какого-либо вмешательства со стороны. Это состояние возникает исключительно благодаря динамическому взаимодействию составляющих систему элементов: критическое состояние является *самоорганизованным*».

«Видимое равновесие является просто периодом спокойствия, застоя между скачкообразными вспышками активности и изменений, во время которых многие виды ис-

чезают, а на смену им приходят новые. Это явление называется периодически нарушаемым, или прерывистым равновесием».

В качестве модельного объекта авторами концепции была выбрана *куча песка*, в которую время от времени падают песчинки. Сначала куча просто растет и уже имеющиеся песчинки остаются на месте (период покоя, равновесия), но время от времени происходят лавинообразные осыпания песка, которые сопровождаются эффектом домино, когда одна песчинка заставляет падать другую или несколько других, а те, в свою очередь, воздействуют на следующие, вовлекая их в цепную реакцию.

Математической моделью процессов, происходящих в куче песка, оказался простой вариант клеточного автомата, который выглядит следующим образом. Клеточный автомат – это совокупность конечных автоматов, расположенных в клетках квадратной решетки. В клетке с координатами  $(x, y)$  находится конечный автомат, который имеет четыре соседа с координатами  $(x \pm 1, y)$ ,  $(x, y \pm 1)$ . Состояния автомата – это натуральные числа  $\{0, 1, \dots, N\}$ , называемые также весами. У каждого автомата есть входы от своих соседей и внешний вход. По входам поступают единицы, которые прибавляются к текущему весу автомата. Если эта сумма превышает порог  $N$ , то автомат «обрушивается»: он раздает по 1 всем четырем соседям, вычитая эти единицы из своего веса. Формально правило обрушения (*toppling rule*) выглядит так:

*если вес  $Z(x, y)$  клетки  $(x, y)$  превысил порог  $N$ , то*

$$Z(x, y) \rightarrow Z(x, y) - (N + 1)$$

$$Z(x \pm 1, y) \rightarrow Z(x \pm 1, y) + 1, Z(x, y \pm 1) \rightarrow Z(x, y \pm 1) + 1.$$

Состояние клеточного автомата называется критическим, если хотя бы одна из клеток находится в состоянии  $N$ : в этом состоянии клетке достаточно получить единицу, чтобы автомат обрушился, и началась цепочка обрушений соседей. Это вполне соответствует идее критического состояния, высказанной в вышеприведенной цитате из [9].

Рассмотрим процесс обрушения на примере клеточного автомата, в котором  $N=3$ .

На рис. 6а показано состояние клеточного автомата, в котором центральная клетка получила единицу (она помечена жирным курсивом). Порог превышен, срабатывает правило обрушения, которое приводит к состоянию на рис. 6б, где порог превышен уже в двух клетках. Возникает лавина, которая заканчивается состоянием на рис. 7, где жирным шрифтом помечены клетки, которые меняли свои веса в ходе лавины.



1	2	0	2	3
2	3	2	3	0
1	2	<b>4</b>	3	2
3	1	3	2	1
0	2	2	1	2

Рис. 6 а

1	2	0	2	3
2	3	3	3	0
1	3	0	<b>4</b>	2
3	1	<b>4</b>	2	1
0	2	2	1	2

Рис. 6 б

1	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	3
<b>3</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>3</b>	3
3	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>2</b>
0	2	<b>3</b>	<b>2</b>	2

Рис.7

Состояние на рис. 7 устойчиво, хотя и критично: порог не превышен ни в одной клетке, хотя многие клетки находятся в состоянии  $N = 3$ .

В критическом состоянии наблюдаются лавины всех размеров, подобно тому, как при возникновении перколяционного кластера возникают кластеры всех размеров. Доля лавин размера  $s$  определяется степенным законом:  $D(s) \sim s^{-\tau}$ . Куча песка является абелевой (коммутативной): если более чем одна клетка неустойчива (критична), независимо от того, в каком порядке происходят обрушения, будут обрушены одни и те же клетки одно и то же число раз и в результате процесс закончится в одном и том же устойчивом состоянии [10, 11].

## 5. Игра выстреливания фишек (chip-firing game)

Игра выстреливания фишек [12] заключается в следующем. Дан граф (ориентированный или неориентированный), в котором могут быть петли и кратные ребра. В начальном состоянии вершины графа содержат некоторое (быть, может, нулевое) количество фишек. Вершина, число фишек в которой не меньше числа ее исходящих ребер,

может выстрелить, т.е. передать по одной фишке по каждому исходящему ребру всем своим соседям. «Ход» игры состоит в выборе стреляющей вершины.

Доказано, что выбор ходов неважен: в любой позиции при любом выборе допустимых ходов конечная игра всегда заканчивается в одной и той же позиции за одно и то же число шагов, а бесконечная игра закичивается с одним и тем же циклом. В ориентированных графах окончание игры может зависеть также от наличия стоковых вершин, т.е. вершин, не имеющих выходящих ребер.

Для неориентированных графов показано, что если последовательность конечна, то она заканчивается за  $O(n^4)$  шагов ( $n$  – число вершин); кратчайший период в периодической игре равен  $n$ ; минимальное число фишек для бесконечной игры равно  $m$  (числу ребер). Существуют алгоритмы полиномиальной сложности для определения, задает ли начальная позиция конечную или бесконечную игру, а также для определения, достижима ли одна позиция из другой.

Рассмотрены различные модификации этой игры: параллельная игра; игра с граничными вершинами (фишки, попавшие в них, выбывают из игры); т.н. «долларовая игра», в которой есть вершина с бесконечной емкостью, которая стреляет только тогда, когда процесс остановился.

Очевидны аналогии между chip-firing game и кучей песка:

- стреляющая вершина – аналог критической клетки в клеточном автомате;
- правило выстреливания аналогично правилу обрушения кучи песка;
- последовательность выстрелов – это лавина;
- граничные вершины в chip-firing game – аналоги граничным клеткам в клеточном автомате;
- независимость конечного состояния от выбора стреляющих вершин – аналог абелевости кучи песка.

При этом chip-firing game – более сильная модель, чем клеточный автомат, поскольку она рассматривает произвольные графы.

## 6. Заключение

Что объединяет все описанные модели?

- Идея всеобщей связности как процесса: слабые связи Грановеттера, перколяционный кластер, большая лавина.
- Идея критического состояния: точка равновесия у Грановеттера; порог перколяции; критическая клетка в клеточном автомате. Главное свойство критического состояния: *малые воздействия ведут к большим последствиям.*
- Степенное распределение кластеров, лавин, подграфов с сильными связями.

Эти модели универсальны: их объединяет не конкретная предметная область, а характер задач, которые возникают в самых разных областях. Наиболее типичными задачами являются:

- структурный макроанализ больших сетей (социальных, телекоммуникационных, сетей ссылок и цитирований и т.д.): анализ устойчивости, связности, выделение кластеров и т.д.;
- моделирование процессов быстрого распространения (эффектов домино): лесных пожаров, эпидемий, слухов, инноваций, социальных беспорядков;
- моделирование медленных эволюционных процессов (биологической эволюции, землетрясений) – процессов, которые в концепции самоорганизованной критичности характеризуются прерывистым равновесием.

Описанные модели могут сыграть важную роль в когнитивных науках. Например, ассоциативные связи, благодаря которым осуществляется доступ к памяти человека, удобно описывать в терминах сильных и слабых связей: стандартные ассоциации – сильные связи; нестандартные ассоциации, характеризующие креативное мышление – слабые связи. Плохо изученный процесс озарения (инсайта) можно представлять как лавину. Наконец, следует отметить, что в последнее десятилетие резко возрос интерес нейрофизиологов к математике сетей. В последних обзорах по теории нервных сетей мозга (см., например, [13, 14]) активно используются не только понятия классической теории графов, но и новейшие средства описания больших сетей: безмасштабные сети, тесные миры, хабы, степенные распределения и т.д.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 11-01-00771а).

## Список литературы

1. Heider F. The Psychology of Interpersonal Relations. New York: Wiley, 1958.
2. Granovetter M.S. The Strength of Weak Ties. The American Journal of Sociology. 1973. Vol. 78, No. 6. P. 1360-1380.
3. Milgram S. The Small-World Problem // Psychology Today. 1967. No. 1. P. 62-67.
4. Granovetter M.S. Threshold Models of Collective Behavior // The American Journal of Sociology. 1978. Vol. 83, No. 6. P. 1420-1443.
5. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005.
6. Тарасенко Ю.Ю. Перколяция: Теория, приложения, алгоритмы. Изд. 2-е. М: ЛИБРОКОМ, 2012.
7. Erdős, P., Rényi A. On Random Graphs. I // Publ. Math. Debrecen, 1959. 6. P. 290-297.
8. Barabasi A.-L., Reka A. Emergence of scaling in random networks // Science. 1999. No. 286. P. 509-512.
9. Bak P. How nature work. New York: Copernicus, 1996. Русский пер. Пер Бак. Как работает природа. М.: URSS, 2013.
10. Dhar D. Self-organized critical state of sandpile automaton models // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64, No. 14. P. 1613-1616.
11. Meester R, Redig F., Znamenski D. The Abelian sandpile: a mathematical introduction. 2008. URL: [http://www.cs.vu.nl/~rmeester/onderwijs/introduction\\_spatial\\_models/sandpile2.pdf](http://www.cs.vu.nl/~rmeester/onderwijs/introduction_spatial_models/sandpile2.pdf)
12. Björner A., Lovász L., and Shor, P. Chip-firing games on graphs // Europ. J. Comb. 1991. Vol. 12. P. 283-291.
13. Bullmore E., Sporns O. Complex brain networks: graph theoretical analysis of structural and functional systems // Neuroscience. Vol. 10. P. 186-198.
14. Baronchelli A, Ferrer-i-Cancho R., Pastor-Satorras R., Chater N., Christiansen M.H. Networks in Cognitive Science // Trends in Cognitive Sciences. 2013. Vol. 17, No. 7. P. 348-360.