УДК 681.5

СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ С НЕЧЕТКИМ ЛОГИЧЕСКИМ РЕГУЛЯТОРОМ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА ВФЛ

Ф.Ф. Алексеев
Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева - КАИ
Россия, 420141, Казань, ул. Карла Маркса, 10
E-mail: falekseev@mail.ru

Ключевые слова: нечеткие системы управления, метод векторных функций Ляпунова, запаздывание, децентрализованные системы управления

Аннотация: С применением метода векторных функций Ляпунова (ВФЛ) получены условия устойчивости T-S-систем с запаздыванием с нечетким регулятором на основе принципа Разумихина. Для синтеза применяется метод синтеза нечетких логических регуляторов (НЛР) с применением ВФЛ.

1. Введение

Рассматриваются нечеткие (типа Такаги-Сугено) системы управления (T-S-системы) с запаздыванием. С применением метода векторных функций Ляпунова (ВФЛ) получены условия устойчивости T-S-систем с запаздыванием с нечетким регулятором на основе принципа Разумихина или метода Н.Н.Красовского. Для синтеза применяется метод синтеза нечетких логических регуляторов (НЛР) с применением ВФЛ. Обсуждаются принципы построения оценок областей притяжения для нечетких систем с запаздыванием. Обсуждаются принципы выбора и коррекции функций принадлежности. Предлагается процедура реализации процесса адаптации системы управления для подавления ошибок при неучтенных неопределенностях. Метод синтеза НЛР применен для непрерывных и дискретных систем для систем управления вертолетом.

2. Синтез нечетких систем с децентрализованным управлением с запаздыванием на основе применения метода векторных функций Ляпунова

Метод функций Ляпунова (ФЛ) и его обобщение метод векторных функций Ляпунова (ВФЛ) широко используется при анализе и синтезе систем управления. (СУ) [1].

Рассматриваются СУ вида

(1) $$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)) + b(t, x(t), x(t-\tau))u(t, x(t), x(t-\tau)),$$

где $x(t)$, $f(t,x(t),x(t-\tau))$ – n-мерные векторные функции, $b((t,x(t),x(t-\tau(t))))$ – $n\times m-$матрица, $0\le\tau(t)\le h$ – векторная функция, удовлетворяющие в области $G=\{(t,x:t\ge t_0,|x|<H\}$ теореме существования и единственности решения основной начальной задачи, и $f(t,0,0)=0$. Исследуем на устойчивость тривиальное решение системы (1) вторым методом Ляпунова. Известно, что практическое применение метода функций Ляпунова к исследованию устойчивости решений уравнений с отклоняющимся аргументом сопряжено с большими трудностями. Одна из основных трудностей – оценка знака производной функции Ляпунова в силу исходных уравнений, так как ее аргументами являются координаты вектор-функции $x(t)$ при различных значениях аргумента. В работе [1] такая система исследована для случая нерегулируемой системы и скалярной функции $\tau(t)$.

Б.С. Разумихиным [4] было доказано, что для суждения об устойчивости тривиального решения общих систем с запаздыванием достаточно исследовать знак производной ФЛ $v(t)$ лишь на множестве непрерывных кривых, удовлетворяющих при каждом $t\ge t_0+h$ условию $v(\sigma,x(\sigma))\le v(t),x(t)),\ \ \sigma\le t$ [2]. Рассмотрим вещественные функции $v_1(t,x),...,v_m(t,x)$, определенные и непрерывные в области G вместе со своими производными $\dot v_1(t,x(t),x(t-\tau)),...,\dot v_m(t,x(t),x(t-\tau))$ в силу системы (1). Пусть $v_i(t,0)=\dot v_i(t,0,0)=0$, $i=\overline{1,m}$. Объединим их в векторную функцию $v(t,x)=(v_1,...,v_m)$. Оценим производные $\dot v_1(t,x(t),x(t-\tau)),...,\dot v_m(t,x(t),x(t-\tau))$ на непрерывных кривых, удовлетворяющих при каждом $t\ge t_0+h$ условию

(2) $$v_1(\sigma,(x(\sigma))+...+v_m(\sigma,x(\sigma))\le v_1(t,x(t))+...v_m(t,x(t)),\sigma\le t.$$

Условие (2) позволяет при оценке этих производных члены с запаздыванием заменить членами без запаздывания и получить систему дифференциальных неравенств вида

(3) $$\dot v\le g(t,v).$$

Пусть вещественная векторная функция $g(t,v)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $g(t,0)=0$;

2) $g(t,v)$ определена и непрерывна в области;

3) у системы сравнения [1]

(4) $$\dot y=g(t,y)$$

решения с неотрицательными начальными условиями определены для $t\ge 0$;

4) каждая компонента $g_s(t,v_1,...,v_m)$ не убывает в D по переменным $v_1,...,v_{s-1},v_{s+1},...v_m$, т.е. для любых точек $M_1=(t,v_1^*,...,v_m^*)\in D$, $M_2=(t,v_1^{**},...,v_{s-1}^{**},v_{s+1}^{**},...,v_m^{**})\in D$, удовлетворяющих условию $v_1^{**}\ge v_1^*,...,v_{s-1}^{**}\ge v_{s-1}^*,v_{s+1}^{**}\ge v_{s+1}^*,...,v_m^{**}\ge v_m^*$, имеет место неравенство $g_s(M_2)\ge g_s(M_1)$.

Введем обозначения $x=x(t),x_t=x(t-\tau(t))$, $x_i=x_i(t)$; $x_{it}=x_i(t-\tau(t))$, $\tilde x=\tilde x(t),\tilde x_t=\tilde x_t(t-\tau(t))$.

Теорема 1 [1]. Пусть существуют неотрицательные в области G функции $v_1(t,x),...,v_m(t,x)$, обладающие в G следующими свойствами:

1) функция $v_1(t,x)+...+v_m(t,x)$ определенно положительна в G;

2) Производные $\dot v_1(t,x,x_t),...,\dot v_m(t,x,x_t)$ этих функций по времени, вычисленные в силу системы (1), на непрерывных кривых (2) удовлетворяют неравенству (3), в котором функция $g(t,v)$ удовлетворяет всем условиям в определении системы сравнения

(4); тривиальное решение системы сравнения (4) устойчиво (асимптотически устойчиво) по Ляпунову. Тогда тривиальное решение системы (1) устойчиво (асимптотически устойчиво) по Ляпунову.

Если при этом функции $v_1(t,x),...,v_m(t,x)$ допускают бесконечно малый высший предел и устойчивость тривиального решения системы сравнения (4) равномерна по t_0 (асимптотическая устойчивость равномерна по (t_0, y_0), то и устойчивость тривиального решения системы (1) равномерна по t_0 (асимптотическая устойчивость равномерна по t_0 и начальным кривым из некоторой области).

Используя метод Бейли [2] построения систем сравнения для обыкновенных дифференциальных уравнений для систем с запаздыванием, имеем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть система (1) состоит из m взаимосвязанных подсистем $\dot{x}(t) = f_i(t,x,x_t) + b_i(t,x,x_t)u_i(t,x,x_t) + G_i(t,\tilde{x},\tilde{x}_t)$ вида

(5) $$\dot{x}(t) = f_i(t,x,x_t) + b_i(t,x,x_t)u_i(t,x,x_t) + G_i(t,\tilde{x},\tilde{x}_t),$$

где при любом фиксированном $t \ge t_0$, $x(t) \in R^n$, $\Sigma_{i=1}{}^m n_i = n$, $\tilde{x}(\xi) = (x_1(\xi),...,x_{i-1}(\xi), x_{i+1}(\xi),...,x_n(\xi))$.

Пусть для каждой подсистемы

(6) $$\dot{x}_i = f_i(t,x_i,x_{it}) + b((t,x,x_t)u((t,x,x_t)$$

можно построить ФЛ $v_i = v_i(t,x_i)$ (или ВФЛ $v_i = (v_{i1}, v_{i2},..., v_{im_{ic}})$.

Замечание. При синтезе ФЛ, наоборот, задаются.

Производные в силу системы (1) имеют вид

$$\dot{v}_{i(18)} = \partial v_i / \partial t + \Sigma_{j=1}{}^m \partial v_i / \partial x_j (f_{ij}(t,x,x_t) + B_i(t,x,x_t)u_i(t,x,x_t)$$

Справедливы оценки

(7) $$c_{i2} \,|\, x_i \,|^2 \le v_i(t,x_i) \le c_{i1} \,|\, x_i \,|^2,$$

(8) $$\dot{v}_{i(18)} \le -c_{i3} \,|\, x_i \,|^2,\ c_{ij} > 0,\ i = 1,m,\ j = \overline{1,3}$$

(или $f_{ij}(t,x,x_t) + b_i(t,x,x_t)u_i(t,x,x_t) \le -c_{i3} \,|\, x_i \,|^2$) на непрерывных кривых, удовлетворяющих условиям $v_i(\sigma, x_i(\sigma)) \le v_i(t, x_i(t)), \sigma \le t$ и

(9) $$|\, grad v_i \,| \le c_{i4} \,|\, x_i \,|,,\quad c_{i4} \ge 0,\ i = 1,m,$$

а связи $G_i(t,\tilde{x},\tilde{x}_t)$ на кривых с условием (2) удовлетворяют неравенству

$$|\, G_i(t,\tilde{x},\tilde{x}_t) \,| \le \sum_{ij=1}^{m} k_{ij} \,|\, x_{ij} \,|, k_{ij} \ge 0\ ,\ i,j = 1,m.$$

Если система

(10) $$\dot{y} = Ay,$$

где $A = (a_{ij})_1^n$, $a_{ii} = -(c_{i3} - c_{i4}\sum_{j=1}^{m} k_{jj}) / 2c_{i2}$, $a_{ij} = c_{i4}{}^2 \Sigma_{i \ne j} k_{ij}{}^2 (c_{i3} - c_{i4}\Sigma_{j=1}{}^m k_{jj})^{-1} / 2c_{j1}$, $i \ne j$, $c_{i3} - c_{j4}\Sigma_{j=1}{}^m k_{jj} > 0$, $i = \overline{1,m}$ устойчива (асимптотически устойчива), то тривиальное решение системы (17) равномерно устойчиво по t_0 (равномерно асимптотически устойчиво по начальным данным).

Замечание. Доказательство можно свести к одной ФЛ, взяв $v_i = \sum_{s=1}^{m_{ic}} v_{is}$.

Доказательство дает метод построения системы сравнения. Возьмем полную производную по времени от функций $v_1(t,x),...,v_m(t,x_m)$ в силу системы (1) и, используя оценки (4), (5), получим

$$\dot{v}_i \le c_{i3}\left|x_i\right|^2 + c_{i4}\left|x_i\right|\Sigma_{i,j=1}{}^{m}k_{ij}\left|x_{ij}\right|.$$

Замечание. При синтезе задаем такие неравенства и ему соответствующие оценки, по которым записывается алгоритм синтеза.

Если в системе (1) в связи не входит $\tilde{x}_t$ $(G_i(t,\tilde{x},\tilde{x}_t) = G_i(t,\tilde{x})$ или если связи на кривых (2) удовлетворяют условию $\left|G_i(t,\tilde{x},\tilde{x}_t)\right| \le \Sigma_{i\ne j}k_{ij}\left|x_j\right|$, $a_{ij} = (c_{i4}{}^2\Sigma_{i\ne j}k_{ij}{}^2)/2c_{j1}c_{j3}$, то СС (23) принимает более простой вид $\dot{y} = Ay$, $A = \left\|a_{ij}\right\|_{i,j=1}^{m}$, $a_{ii} = -c_{i3}/2c_{i2}$, $i \ne j$. И совсем простая форма СС получается при $A = diag(a_{ii})$, $a_{ii} < 0$, $i = 1, m_i$.

Определяется T-S система (Takagi-Sugeno) для подсистем (для i-й подсистемы рассматривается p_i $T-S$-система)

$$\dot{x}_i = f_i(t,x_i,x_{it}) + b_i(t,x_i,x_{it})u_i(t,x_i,x_{it}) + G_i(t,x,x_t).$$

Определяем систему нечетких правил для системы

$$Rule1: IF \;\; z_{i1} = \mu_{i1} \; AND \; z_{i2} = \mu_{i2} \; \ldots \; AND \; z_{ip} = \mu_{ip}$$
$$THEN \;\; \dot{x}_i = f_i^1(t,x_i,x_{it}) + b_i^1(t,x_i,x_{it})u_i(t,x_i,x_{it}) + G_i^1(t,x,x_t);$$
$$Rule2: IF \;\; z_{i1} = \mu_{i1} \; AND \; z_{i2} = \mu_{i2} \; \ldots \; AND \; z_{ip} = \mu_{ip}$$
$$THEN \;\; \dot{x}_i = f_i^2(t,x_i,x_{it}) + b_i^2(t,x_i,x_{it})u_i^2(t,x_i,x_{it}) + G_i^1(t,x,x_t); \; \ldots.;$$
$$Rulep: IF \;\; z_{i1} = \mu_{i1} \; AND \; z_{i2} = \mu_{i2} \ldots AND \; z_{ip} = \mu_{ip}$$
$$THEN \;\; \dot{x}_i = f_i^p(t,x_i,x_{it}) + b_i^p(t,x_i,x_{it})u_i^p(t,x_i,x_{it}) + G_i^p(t,x_i,x_{it}).$$

Определяем систему нечетких правил для регулятора

$$Rule1:: \; IF \;\; z_1 = \mu_1 \; AND \; z_2 = \mu_2 \; \ldots \; AND \; z_p = \mu_p \; THEN \;\; u_i = u_i^1;$$
$$Rule2:: \; IF \;\; z_1 = \mu_1 \; AND \; z_2 = \mu_2 \; \ldots \; AND \; z_p = \mu_p \; THEN \;\; u_i = u_i^2; \; \ldots;$$
$$Rulep:: \; IF \;\; z_1 = \mu_1 \; AND \; z_2 = \mu_2 \; \ldots \; AND \; z_p = \mu_p \; THEN \;\; u_i = u_i^p$$

Система на выходе

$$\dot{x}_i = (\Sigma_{j=1}{}^{r_i}w_i(z_i(t))(f_i^j(t,x_i,x_{it}) + b^j(t,x_i,x_{it})u_i^j(t,x_i,x_{it}) + G_i^p(t,x,x_t)u_i^p(t,x,x_t))/$$
$$/(\Sigma_{j=1}{}^{r_i}w_i(z_i(t))) + B_G u_G$$
$$u_i = (\Sigma_{j=1}{}^{r_i}w_i(z_i(t))u_i^j)/\Sigma_{j=1}{}^{r_i}w_i(z_i(t))$$

Локальные регуляторы определяются с применением собственных ВФЛ v_i согласно подходу в статьях [9, 10].

u_G определяются согласно тому же подходу в статье [9, 10]. Можно явно записать:

$$v_i = x^T P_i x; \; \dot{v}_i = 2x^T P_i^G(\Sigma_{j=1}{}^{p}f_i^j(t,x_i,x_{it}) + b^j(t,x,x_t)u_i^j(t,x,x_t) + 2x^T P_i^G B_G u_G).$$
$$S = \left\|s_{ij}\right\|_{i,j=1,m_c}, \; \left\|s_{11} \;\; s_{12} \;\; \ldots \;\; s_{1m_c}\right\| = \left\|B_1(x)\right\|, \; \left\|s_{21} \;\; s_{22} \;\; \ldots \;\; s_{2m_c}\right\| = \left\|B_2(x)\right\|, \ldots,$$
$$\left\|s_{m_c1} \;\; s_{m_c2} \;\; \ldots \;\; s_{m_cm_c}\right\| = \left\|B_{m_c}(x)\right\|,$$

$B_i(x)$ –вектор-строка $B(x)$, $i = 1,...,n$. $R = \left\|r_1 \;\; r_2 \;\; \ldots \;\; r_{m_c}\right\|^T$, $r_1 = \sum_{j=1}^{m_c} a_{1j}{}^c x^T P_j x - F_1(x)$;

$$r_2 = \sum_{j=1}^{m_c} a_{2j}{}^c x^T P_c x - F_2(x); \; \ldots; r_{m_c} = \sum_{j=1}^{m_c} a_{m_cj}{}^c x^T P_j x - F_{m_c}(x).$$

Глобальное дифференциальное неравенство с системой сравнения $\dot{y}^G = A^G y^G$ $2x^T P_i^G(\Sigma_{j=1}{}^p f_i^j(t,x_i,x_{it}) + b^j(t,x,x_t)u_i^j(t,x,x_t) + 2x^T P_i^G B_G u_G \le a_{11}x^T P_1^G x + \ldots + a_{1m_c} x^T P_{m_c}{}^G x$; …; $2x^T P_i^G(\Sigma_{j=1}{}^p f_i^j(t,x_i,x_{it}) + b^j(t,x,x_t)u_i^j(t,x,x_t) + 2x^T P_i^G B_G u_G \le a_{m_c1}x^T P_1^G x + \ldots + a_{m_cm_c} x^T P_{m_c}{}^G x$. $Su_G \le R$, S, R записываются согласно упомянутым работам, откуда $u_G \le S^{-1}R$

Если неопределенность будем учитывать только для регулятора (Tomescu [5]), то получаем обобщение результатов [9] для децентрализованных систем

$$2x^T P_i^G f_i^j(t,x_i,x_{it}) + 2x^T P_i^G b^j(t,x,x_t)u_i^j(t,x,x_t) + 2x^T P_i^G B_G u_G \le$$
$$a_{11}x^T P_1^G x + \ldots + a_{1m_c} x^T P_{m_c}{}^G x; \quad \ldots;$$
$$2x^T P_i^G f_i^j(t,x_i,x_{it}) + 2x^T P_i^G b^j(t,x,x_t)u_i^j(t,x,x_t) + 2x^T P_i^G B_G u_G \le$$
$$a_{m_c1}x^T P_1^G x + \ldots + a_{m_cm_c} x^T P_{m_c}{}^G x;$$
$$u_i = (\Sigma_{j=1}{}^{r_i} w_i(z_i(t))u_i^j) / \Sigma_{j=1}{}^{r_i} w_i(z_i(t)); \; Su_G \le R,\; S,\; R,\; u_G \le S^{-1}R.$$

2.1. T-S-системы с подсистемами типа Лурье

Система управления имеет вид

$$\dot{x}(t) = A_i x_i + A_{i1}x_{it} + B_i\varphi_i(t,\sigma_i) + B_{1i}u_i + X_i(t,x_i,x_{it}) + G_i(t,\tilde{x},\tilde{x}_t).$$

Определяем систему нечетких правил для системы

$$Rule1: IF \;\; z_1 = \mu_1 \; AND \; z_2 = \mu_2 \; \ldots \; AND \; z_p = \mu_p$$
$$THEN \;\; \dot{x}(t) = A_i^1 x_i + A_{i1}{}^1 x_{it} + B_i^1\varphi_i(t,\sigma_i) + B_{1i}{}^1 u_i^1 + X_i(t,x_i,x_{it}) + G_i^1(t,x,x_t)$$
$$Rule2: \; IF \;\; z_1 = \mu_1 \; AND \; z_2 = \mu_2 \; \ldots \; AND \; z_p = \mu_p$$
$$THEN \;\; \dot{x}(t) = A_i^2 x_i + A_{i1}{}^2 x_{it} + B_i^2\varphi_i(t,\sigma_i) + B_{1i}{}^2 u_i^2 + X_i^2(t,x_i,x_{it}) + G_i^2(t,x,x_t)$$
$$\ldots$$
$$Rulep: \; IF \;\; z_1 = \mu_1 \; AND \; z_2 = \mu_2 \; \ldots \; AND \; z_p = \mu_p$$
$$\dot{x}(t) = A_i^p x_i + A_{i1}{}^p x_{it} + B_i^p\varphi_i(t,\sigma_i) + B_{1i}{}^p u_i^p + X_i^p(t,x_i,x_{it}) + G_i^p(t,x,x_t)$$

Определяем систему нечетких правил для регулятора. Здесь u в подсистемах определяются по формулам, полученным в статье [9] по полному вектору состояния либо по выходу

$$Rule1:: \; IF \;\; z_1 = \mu_1 \; AND \; z_2 = \mu_2 \; \ldots \; AND \; z_p = \mu_p \; THEN \;\; u_i = u_i^1;$$
$$Rule2:: \; IF \;\; z_1 = \mu_1 \; AND \; z_2 = \mu_2 \; \ldots \; AND \; z_p = \mu_p \;\; THEN \;\; u_i = u_i^2; \; \ldots;$$
$$Rulep:: \; IF \;\; z_1 = \mu_1 \; AND \; z_2 = \mu_2 \; \ldots \; AND \; z_p = \mu_p \;\; THEN \;\; u_i = u_i^p.$$

Система на выходе

$$\dot{x}(t) = \Sigma_{j=1}{}^{r_i} w_i(z_i(t))(A_i^s x_i + A_{i1}{}^s x_{it} + B_i^s\varphi_i(t,\sigma_i) + B_{1i}{}^s u_i^s + X_i^s(t,x_i,x_{it}) + G_i^s(t,x,x_t))/$$
$$/(\Sigma_{j=1}{}^{r_i} w_i(z_i(t))) + B_G u_G; \; u_i = (\Sigma_{j=1}{}^{r_i} w_i(z_i(t))u_i^j) / \Sigma_{j=1}{}^{r_i} w_i(z_i(t)),$$

u_G определяются согласно подходу в статье [9].

Можно явно записать: $v_i = x^T P_i x$;

$$\dot{v}_i = 2x^T P_i^G(\Sigma_{j=1}{}^p A_i^s x_i + A_{i1}{}^s x_{it} + B_i^s\varphi_i(t,\sigma_i) + B_{1i}{}^s u_i^s + X_i^s(t,x_i,x_{it}) + G_i^s(t,x,x_t)) + 2x^T P_i^G B_G u_G)$$

Глобальное дифференциальное неравенство с системой сравнения $\dot{y}^G = A^G y^G$,

$$2x^T P_i^G(\Sigma_{j=1}{}^p A_i^s x_i + A_{i1}{}^s x_{it} + B_i^s\varphi_i(t,\sigma_i) + B_{1i}{}^s u_i^s + X_i^s(t,x_i,x_{it}) + G_i^s(t,x,x_t)) + 2x^T P_i^G B_G u_G \le$$
$$\le a_{11}x^T P_1^G x + \ldots + a_{1m_c} x^T P_{m_c}{}^G x; \qquad \ldots;$$

$2x^T P_i^G (\Sigma_{j=1}{}^p A_i^s x_i + A_{i1}{}^s x_{it} + B_i^s \varphi_i(t,\sigma_i) + B_{1i}{}^s u_i^s + X_i^s(t,x_i,x_{it}) + G_i^s(t,x,x_t)) + 2x^T P_i^G B_G u_G \le$
$\le a_{m_c 1} x^T P_1^G x + ... + a_{m_c m_c} x^T P_{m_c}{}^G x$, $Su_G \le R$, S, R, определяется $u_G \le S^{-1} R$.

2.2. Линейные системы

Воспользуемся вспомогательной леммой [8].

Лемма [8]. Пусть Q любая $n \times n$-матрица. Для $k > 0$, постоянной и симметричной матрицы $S > 0$ выполняется ($x \in R^n$, $y \in R^n$) $2x^T Qy \le kx^T QS^{-1} Q^T x + y^T Sy / k$.

Пусть система имеет вид

(11) $\dot{x} = Ax + \grave{A}_1 x_t + Bu$, $x_t = x(t - \tau(t))$,

A, A_1 – $n \times n$-, B – $n \times m$-постоянные матрицы.; $i-$я компонента ВФЛ определяется выражением $v_i = x^T P_i x$. Тогда с линейной СС можно записать дифференциальное неравенство

$$x^T G_i x + 2x^T P_i A_1 x_t + 2x^T P_i Bu \le a_{i1}{}^c x^T P_1 x + a_{i2}{}^c x^T P_2 x + ... + a_{im_c}{}^c x^T P_{m_c} x,$$

где $\dot{v}_i = \dot{x}^T P_i x + x^T P_i \dot{x} = x^T G_i x + 2x^T P_i A_1 x + 2x^T P_i Bu$, $G_i = A^T P_i + P_i A$, $i = 1,2,...,m_c$. Отсюда определяется система неравенств $x^T G_1 x + 2x^T P_1 A_1 x_t + 2x^T P_1 Bu \le \sum_{j=1}^{m_c} a_{1j}{}^c x^T P_c x$, $x^T G_2 x + 2x^T P_2 A_1 x_t + x^T P_2 Bu \le \sum_{j=1}^{m_c} a_{2j}{}^c x^T P_j x$, … , $x^T G_{m_c} x + 2x^T P_{m_c} A_1 x_t + 2x^T P_{m_c} Bu \le \sum_{s=1}^{m_c} a_{m_c}{}^{jc} x^T P_{jc} x$.

Перепишем неравенства в следующем виде

$$2x^T P_1 Bu \le \sum_{s=1}^{m_c} a_1{}^{jc} x^T P_{jc} x - x^T G_1 x - 2x^T P_1 A_1 x_t,\ 2x^T P_2 Bu \le \sum_{s=1}^{m_c} a_2{}^{jc} x^T P_{jc} x -$$
$$- x^T G_2 x - 2x^T P_2 A_1 x_t,\ \dots,\ 2x^T P_{m_c} Bu \le \sum_{j=1}^{m_c} a_{m_c j}{}^c x^T P_j x - x^T G_{m_c} x - 2x^T P_{m_c} A_1 x_t.$$

И используя лемму, преобразуем неравенства

$$2x^T P_1 Bu \le \sum_{s=1}^{m_c} a_1{}^{jc} x^T P_{jc} x - x^T G_1 x - k_1 x^T P_1 A_1 S^{-1} A_1^T P_1 x - \frac{1}{k_1} x_t^T S_1 x_t,$$

$$2x^T P_2 Bu \le \sum_{s=1}^{m_c} a_2{}^{jc} x^T P_{jc} x - x^T G_2 x - k_2 x^T P_2 A_1 S_2{}^{-1} A_1^T P_2 x - \frac{1}{k_2} x_t^T S_2 x_t, \dots,$$

$$2x^T P_{m_c} Bu \le \sum_{j=1}^{m_c} a_{m_c j}{}^c x^T P_j x - k_{m_c} x^T P_{m_c} A_1 S_{m_c}{}^{-1} A_1^T P_{m_c} x - \frac{1}{k_{m_c}} x_t^T S_{m_c} x_t,$$

$S_i > 0$ – симметричная матрица, $k_i > 0$ – постоянная.

Еще раз перепишем с обозначениями

$$Su \le R,\ S = \|s_{ij}\|, i = 1,m; j = 1,m, \|s_{11} \quad s_{12} \quad ... \quad s_{1m_c}\| = \|2x^T P_1 B\|,$$
$$\|s_{21} \quad s_{22} \quad ... \quad s_{2m_c}\| = \|2x^T P_2 B\|, \dots, \|s_{m_c 1} \quad s_{m_c 2} \quad ... \quad s_{m_c m_c}\| = \|2x^T{}_{m_c} B\|,\ R =$$
$$\|r_1 \quad r_2 \quad ... \quad r_{m_c}\|^T,$$

$$r_1 = \sum_{j=1}^{m_c} a_{1j}{}^c x^T P_j x - x^T G_1 x - k_1 x^T P_1 A_1 S^{-1} A_1^T P_1 x - \frac{1}{k_1} x_t^T S_1 x_t\,;$$

$$r_2 = \sum_{j=1}^{m_c} a_{2j}{}^c x^T P_j x - x^T G_2 x - k_2 x^T P_2 A_1 S_2{}^{-1} A_1^T P_2 x - \frac{1}{k_2} x_t^T S_2 x_t\,;\ \ldots;$$

$$r_{m_c} = \sum_{j=1}^{m_c} a_{m_c j}{}^c x^T P_j x. - x^T G_{m_c} x - -k_{m_c} x^T P_{m_c} A_1 S_{m_c}{}^{-1} A_1^T P_{m_c} x - \frac{1}{k_{m_c}} x_t^T S_{m_c} x_t\,.$$

В общем случае матрица $A_c = \|a_{ij}\|$ должна удовлетворять специальным свойствам [1]. Применим частный случай диагональной матрицы $A_c = diag\{a_{11,} a_{22}, ..., a_{m_c m_c}\}$, $a_{ii} < 0$, получим

$$r_1 = a_{11} x^T P_1 x - x^T G_1 x - k_1 x^T P_1 A_1 S_1{}^{-1} A_1^T P_1 x - \frac{1}{k_1} x_t^T S_1 x_t\,;$$

$$r_2 = a_{22} x^T P_2 x - x^T G_2 x - k_2 x^T P_2 A_1 S_2{}^{-1} A_1^T P_2 x - \frac{1}{k_2} x_t^T S_2 x_t\,;\ \ldots;$$

$$r_{m_c 1} = a_{m_c m_c} x^T P_{m_c} x - x^T G_{m_c} x - -k_{m_c} x^T P_{m_c} A_1 S_{m_c}{}^{-1} A_1^T P_{m_c} x - \frac{1}{k_{m_c}} x_t^T S_{m_c} x_t\,.$$

Теперь, аналогично, управление находится из $u_i \le (S^{-1}R)_i$, $i = 1, 2, ..., m_c$. Функции связи здесь можно принять вида $X_i(t, x_i, x_{it}) + G_i(t, \tilde{x}, \tilde{x}_t)$: $\dot{x}(t) = A_i x_i + B_{1i} u_i + X_i(t, x_i, x_{it}) + G_i(t, \tilde{x}, \tilde{x}_t)$.

3. Линейная дискретная система управления

При согласовании квантования по времени и времени запаздывания возможно рассмотрение систем $x_{s+1} = Ax_s + Bu_s$, $A - n \times n -$ $B - n \times m -$ постоянные матрицы. ВФЛ также выбирается в виде $v = (v_1, v_{2,}, ..., v_{m_c})^T$ с компонентами $v_i = x_s{}^T P_j x_s$, $j = 1, ..., m_c$; $A^T P_i A - P_i = G_i$. Выбирается линейная разностная система неравенств

$$\Delta v < A^c v\,,\ \Delta v_s = (\Delta v_{s1}, \Delta v_{s2}, ..., \Delta v_{sm_c})^T\,,$$

или

$$x_s{}^T G_i x_s + 2x_s{}^T A^T B u_s + u_s{}^T B^T P_i B u \le a_{i1}{}^c v_1 + a_{i2}{}^c v_2 + ... + a_i{}^c v_{m_c}\ ,$$

или

$$u_s{}^T B^T P_i B u + 2x_s{}^T A^T B u_s \le \sum_{j=1}^{m_c} a_{ij}{}^c x_s P_j x_s - x^T G_i x_s\,,\ i = 1, ..., m_c\,.$$

Введем обозначения: $\overline{A} = B^T P_i B\ \ (>0)$; $\overline{B} = 2x_s{}^T A^T B$; $\overline{C}_i = \sum_{j=1}^{m_c} a_{ij}{}^c x_s P_j x_s - x^T G_i x_s$. Разностная система принимает вид $u_s{}^T D u_s + C u_s - R \le 0$. Обозначим $U_i = u_s{}^T \overline{A}_i u_s + \overline{B}_i u_s + \overline{C}_i$. Вычислим первый дифференциал $dU = du^T \overline{A}_i + u^T \overline{A}_i du_s + du_s{}^T C^T = 2du_s{}^T D u_s + du_s{}^T \overline{B}^T$. Из уравнений $2\overline{A}_i u_s + \overline{B}_i^T = 0$, $i = 1, ..., m_c$ или $2\overline{A}_{1-i} u_s + \overline{B}_1^T = 0$; $2\overline{A}_2 u_s + \overline{B}_2^T = 0$; … ; $2\overline{A}_{m_c} u_s + \overline{B}_{m_c}{}^T = 0$; определяется регулятор $u_s = -\frac{1}{2}\overline{A}_i^{-1}\overline{B}_i^T$ при выполнении достаточного условия экстремума $d^2 U_i > 0$ или $d^2 U_i = 2du_s{}^T \overline{A}_i du_s > 0$ или $\overline{A}_i > 0$, $i = 1, ..., m_c$.

3.1. Синтез с ВФЛ с помощью составления связки функций-компонент

Составляется разностное неравенство

$$u_s^T B^T P_i B u_s + 2x_s^T A^T P_i B u_s + x_s^T G_i x_s - a_{i_1} V_1 - a_{i_2} V_2 - \ldots - a_{im_c} V_{m_c} \le 0,\ i = 1, m_c .$$

Суммируем неравенства:

$$\sum_{i=1}^{m_c} \left\{ u_s^T B^T P_i B_{u_s} + 2x_s^T A^T P_i B u_s + x_s^T G_i x_s - a_{i_1} V_1 - a_{i_2} V_2 - \ldots - a_{im_c} V_{m_c} \right\} \le 0 .$$

Преобразуем

$$u_s^T B^T \left(\sum_{i=1}^{m_C} P_{\mathrm{i}} \right) B u_s + 2x_s^T A^T \left(\sum_{i=1}^{m_c} P_i \right) B u_s + x_s^T \left(\sum_{i=1}^{m_c} G_i \right) x_s - \left(\sum_{i=1}^{m_c} a_{i_1} \right) V_1 - \left(\sum_{i=1}^{m_c} a_{i_2} \right) - \left(\sum_{i=1}^{m_c} a_{i_{m_c}} \right) V_{m_c} \le 0 ,$$

$A^c = \left\| A_1 \quad A_2 \quad \ldots \quad A_{m_c} \right\|$, $A_1, A_2, ..., A_{m_C}$ – суммы элементов столбцов. Перепишем выражение

$$u_s^T B^T P B u_s + 2x_s^T A^T P B u_s + x_s^T G x_s - A_1 V_1 - A_2 V_2 - \ldots - A_{m_c} V_{m_c} \le 0$$

Ищем минимум левой части. Составляем: связку $\Phi = u_s^T B^T P B u_s + 2x_s^T A^T P B u_s + x_s^T G x_s - A_1 V_1 - A_2 V_2 - \ldots - A_{m_C} V_{m_C}$. Вычисляем первый дифференциал $d\Phi = du_s^T B^T P B u_s + u_s^T B^T P B du_s + 2x_s^T A^T P B du_s = 0$. Получаем соотношение $2u_S^T B^T P B + 2x_s^T A^T P B = 0$. Преобразуем: $B^T P B u_s = -B^T P A x_S$, $P = \sum_{i=1}^{m_c} P_i$. Получаем: $S u_s = R$, $S = B^T P B$, $R = -B^T P A x_S$, $u_s = S^{-1} R$. Достаточные условия минимума имеют вид $d^2\Phi = \mathrm{d}u_s^T B^T P B du_s > 0$, так как $B^T P B > 0$, $P = \sum_{i=1}^{m_c} P_i > 0$. Должно быть выполнено разностное неравенство $u_s \le S^{-1} R$. Преимуществом данных соотношений заключается в том, что ослабляются требования на компоненты ВФЛ, т.е теперь $P_i \ge 0$, $i = 1, \overline{m_c}$, но сумма должна быть положительно определенной $\sum_{i=1}^{m_C} P_i > 0$. Т.е не обязательно находить функцию Ляпунова с помощью разностного матричного равенства типа $A^T P_i A - P_i = G_i$. Добиваемся выполнения разностного неравенства $u_s \le S^{-1} R$ усилением неравенства.

3.2. Синтез дискретных линейных систем с ВФЛ (полный вариант)

Рассматривается разностное неравенство

$$u_s^T B^T P_i B u_s + 2x_s^T A^T P_i B u_s + x_s^T G_i x_s - a_{i_1} V_1 - a_{i_2} V_2 - \ldots - a_{i_{m_c}} V_{m_c} \le 0 .$$

Преобразуем это неравенство. Вводим обозначения: $\overline{G}^T = (\overline{G}_1, \overline{G}_2, ..., \overline{G}_{m_c})$, $\overline{G}_1 = -x_s^T G_1 x_s$, $\overline{G}_2 = -x_s^T G_2 x_s$, $\overline{G}_{m_c} = -x_s^T G_{m_c} x_s$; $V = \left\| v_1, v_2, \ldots, v_{m_c} \right\|^T$ – квадратичная ВФЛ; $U_s = \left\| U_{s_1} \quad U_{s_2} \quad \ldots \quad U_{s_{m_c}} \right\|^T$, где $U_{s_1} = -u_s^T B^T P_1 B u_s$; $U_{s_2} = -u_s^T B^T P_2 B u_s$; …; $U_{s_{m_c}} = -u_s^T B^T P_{m_c} B u_s$; $S = \left\| 2x_s^T A^T P_1 B \quad 2x_s^T A^T P_2 B \quad \ldots \quad 2x_s^T A^T P_{m_c} B \right\|^T$; $S^{-1} = \overline{B}_s$. С помощью введенных обозначений запишем выражение для синтеза регулятора $u_{s+1} \le \overline{B}_s U_s + \overline{B}_s \overline{G} + \overline{B}_s A^{\bar{n}} V$; или

$$u_{1s+1} \le \bar{b}_{11s}U_{s1} + \bar{b}_{12s}U_{s2} + \ldots + \bar{b}_{1m_c}U_{sm_c} + \bar{b}_{11s}G_1 + \bar{b}_{12s}G_2 + \ldots + \bar{b}_{1m_c}G_{m_c} + \bar{b}_{11s}a_{11}{}^c v_1 ; \qquad \ldots \qquad ;$$
$$u_{m_c s+1} \le \bar{b}_{m_c 1s}U_{s1} + \bar{b}_{m_c 2s}U_{s2} + \ldots + \bar{b}_{m_c m_c s}U_{sm_c} + \bar{b}_{m_c 1s}G_1 + \bar{b}_{m_c 2s}G_2 + \ldots + \bar{b}_{m_c m_c s}G_{m_c} + \bar{b}_{m_c m_c s}a_{m_c m_c}{}^c v_{m_c} .$$

4. Заключение

С применением метода векторных функций Ляпунова (ВФЛ) получены условия устойчивости T-S-систем с запаздыванием с нечетким регулятором на основе принципа Разумихина. Для синтеза применяется метод синтеза нечетких логических регуляторов (НЛР) с применением ВФЛ.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований по постановлению правительства 220 по договору от 30 декабря 2010 г. №11.G34.31.0038 и гранта РФФИ-Поволжье 12-01-97023-р_поволжье_а 2012г.

Список литературы

1. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. Под ред. А.А.Воронова, В.М. Матросова. М.: Наука, 1987. 312 с.
2. Громова П.С.. Метод векторных функций Ляпунова для систем с отклоняющимся аргументом // В кн.: Прямой метод в теории устойчивости и его приложения. Новосибирск: Наука, 1981. С. 45-54.
3. Разумихин Б.С. Об устойчивости систем с запаздыванием // ПММ. 1956. Т. 20, № 4. С. 500-512.
4. Takagi T., Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control // IEEE Trans. Systems Man Cybern. 1985. Vol. 15, No. 1. P. 116-132.
5. Tomescu M.-L., Preitl S., Precup R.-E., Tar J.K. Stability analysis method for fuzzy control systems dedicated controlling nonlinear processes // Acta Polytechnica Hungarica. 2007. Vol. 4, No. 3. P. 127-141.
6. Cao Y.-Y., Frank P.M. Stability and synthesis of nonlinear time-delay systems via linear Takagi-Sugeno fuzzy models // Fuzzy Sets and Systems. 2001. Vol. 124. P. 213-229.
7. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
8. Алексеев А.Ф., Алексеев Ф.Ф., Дегтярев Г.Л. Анализ и синтез нечетких систем управления с запаздыванием и импульсами // Вестник КГТУ им. А.Н.Туполева. 2012. № 2. С. 274-281.
9. Алексеев А.Ф., Алексеев Ф.Ф., Дегтярев Г.Л. Синтез нелинейных нечетких алгоритмов управления на основе метода векторных функций Ляпунова // Вестник КГТУ. 2012. № 4. С. 247-255.
10. Алексеев А.Ф., Алексеев Ф.Ф., Горшкова К.Л., Дегтярев Г.Л. Синтез нечетких алгоритмов управления на основе метода векторных функций Ляпунова для систем с запаздыванием // Вестник КГТУ. 2013. № 2.